**Плоскости в аффинном пространстве** (план)

Будем насыщать наше аффинное пространство фигурами.

Даем определение векторного подпространства.

Разбираем, как устроена плоскость в трёхмерном пространстве. Делаем вывод: чтобы получить плоскость, надо от точки отложить направляющее пространство.

Обобщаем

***Плоскости в аффинном пространстве***

Пусть фигура  в некотором репер задается системой линейных уравнений (СЛУ)



или так:

,

где  и .

Вместе системой рассмотрим однородную систему линейных уравнений

.

Из алгебры известно, что множество решений  системы  можно получить следующим образом:

а) найти одно решение  этой системы (этому решению будет соответствовать некоторая точка  такая, что ).

б) найти множество  решений системы , которое задает векторное подпространство  в , где  и ‑ ранг матрицы  ( тогда и только тогда, когда , то есть когда ).

и тогда

в) .

Переходя от координатных столбцов к соответствующим точкам, получим, что фигура , задаваемая системой уравнений , может быть получена откладыванием векторного подпространства  от точки , то есть

.

**Определение 1.** Фигура, которая в некотором репере может быть задана системой линейных уравнений, называется -мерной плоскостью в .

Очевидно,  является (самой большой) плоскостью в .

**Упражнение 1**. Определение 1 корректно, то есть не зависит от выбора репера.

**Замечание 1**. Подпространство  плоскости  называется направляющим подпространством (пространством) этой плоскости. Как показано выше, если плоскость задается СЛУ

,

то направляющее подпространство  этой плоскости задается соответствующей однородной СЛУ

.

Точку  в называют начальной точкой.

***С этого момента пропустить для самостоятельного прочтения.***

Вот такая арифметика: для любого подпространства  и  верно утверждение

.

Так как для любой точки  такой, что , то ,

то есть в качестве начальной можно брать любую точку плоскости. Из следует также, что **для любых двух точек  вектор ** принадлежит направляющему пространству  плоскости . Более того

,

где в качестве начальной точки  можно брать любую точку плоскости .

***До этого момента.***

***Еще раз об уравнении плоскости.***

Будем считать, что в  зафиксирован репер .

-мерная плоскость может быть задана уравнением (совместной системой линейных уравнений) , где .

Это уравнение будем называть общим уравнением плоскости .

Вместе с тем, , где  ‑ начальная точка,  ‑ направляющее пространство плоскости  и  ‑ базис  (векторы базиса направляющего пространства будем называть направляющими векторами плоскости).

Обозначив координатный столбец произвольной точки плоскости  через , координатный столбец точки  через , а координатный столбец -ого направляющего вектора плоскости через  (), получим, что точка  принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда



или



Уравнение называется **параметрическим уравнением** плоскости.

**Определение 2.** Одномерная плоскость в аффинном пространстве называется прямой.

Работа с уравнениями предполагает умение переходить от одного уравнения одного вида к другому. Для этого надо знать, как «читать» уравнение, то есть, как извлекать из него необходимую информацию (эта информация естественна: начальная точка и направляющие векторы), и как по этой информации создавать уравнение.

Перейдем к вопросу

**Ваимное расположение плоскостей.**

***Совпадение плоскостей.***

Пусть  и  ‑ две плоскости в , где  и  ‑ размерности их направляющих подпространств.

**Лемма 1.**  тогда и только тогда, когда их направляющие пространства совпадают и содержат вектор  (вектор-мостик).

Доказательство. Заметим сразу, что

 и .

При этом, если , то .

Наоборот, пусть . Тогда

.

***Пересечение плоскостей.***

Пусть  и  ‑ две плоскости, заданные уравнениями  и  соответственно. Тогда пересечение  задается системой линейных уравнений  и является, следовательно, либо пустым множеством, либо плоскостью. Предположим, что . Так как направляющее пространство  плоскости  задается однородной системой , заключаем, что

.